FREGES IRRTÜMER
oder
DIE GESCHICHTE DER MATHEMATIK UM 1900

Esther Ramharter

Abstract:
Es gibt Irrtümer, die wir alle gern begangen hätten, weil sie so sehr auf der Höhe der Zeit stehen, dass sie – obwohl Irrtümer – wahre fachliche Größe erkennen lassen. So verhält es sich auch mit vier Irrtümern des bedeutenden Logikers und „Erfinders" der Axiomatik für die Prädikatenlogik, Gottlob Frege (1848-1925). Seine Irrtümer markieren entscheidende Stellen der Entwicklung der Mathematik um 1900: die Axiomatisierung der Geometrie bzw. der Mathematik im allgemeinen, die Nicht-Euklidischen Geometrien, die Grundlagenprobleme und die Präzisierung des Funktionsbegriffs. Beim Studium der Fregeschen Irrtümer erfährt man daher einiges über revolutionäre Ereignisse in der Mathematik, man lernt aber auch einiges über die Natur von Fehlern.

1. Einleitung

Gottlob Frege hat die moderne Logik, Philosophie und Sprachwissenschaft entscheidend geprägt. Er hat die Prädikatenlogik, also das formale Umgehen mit Prädikaten (Relationen) und Quantoren, entwickelt. Seine Unterscheidung zwischen Sinn und Bedeutung von Wörtern hat die Semantik vorangetrieben, vermeintliche Ungereimtheiten der logischen Analyse der Sprache behoben und sich als ein grundlegendes Instrumentarium der analytischen Philosophie herausgestellt. Seine Versuche einer Grundlegung der Arithmetik sind zum Vorläufer zahlreicher weiterer derartiger Versuche geworden. Frege ist also einer „der Großen".

Dennoch hat Frege gerade in den entscheidenden Fragen betreffend die Entwicklung der Mathematik seiner Zeit geirrt. Diese Irrtümer näher anzusehen, ist die Intention der folgenden Untersuchungen.

Die Zeit, in der Frege seine Arbeiten verfasst hat, also die zweite Hälfte des 19. Jahrhunderts und das beginnende 20. Jahrhundert, ist gekennzeichnet durch eine Reihe von Umbrüchen in der Mathematik. Die Axiomatisierung der Mathematik und die Nicht-Euklidischen Geometrien etwa stellten Herausforderungen und Zumutungen für das Denken dar, gegen die sich das Denken auch mit Fehlern gewehrt hat.

2. Freges Irrtümer

Im Zusammenhang mit der Präzisierung des Funktionsbegriffs nimmt Frege eine Haltung ein, die von dem, was heute gemeinhin in der Mathematik anerkannt ist, abweicht:

1. „Irrtum“

> *Es kommt mir darauf an zu zeigen,* ***daß das Argument nicht mit zur Funktion gehört,*** *sondern mit der Funktion zusammen ein vollständiges Ganzes bildet;* ***denn die Funktion für sich allein ist unvollständig,*** *ergänzungsbedürftig oder ungesättigt zu nennen.*

FREGE FUB, p.21

Unterscheiden wir zwei Auffassungen von Funktionen: die eine sieht Funktionen als spezielle Relationen, also als Mengen von geordneten Paaren an, die andere als funktionale Zusammenhänge in der Realität, wie etwa Fieberkurven. Bei der Sichtweise von Funktionen als funktionale Zusammenhänge liegt der Akzent darauf, dass und wie der Zusammenhang *generiert* wird. Funktionen wie etwa $f(x)=x^2$ werden durch ein Bildungsgesetz erzeugt, die Fieberkurven durch einen fiebernden Organismus.

Historisch gesehen sind Funktionen als funktionale Zusammenhänge entstanden. Galilei gibt funktionale Zusammenhänge bei astronomischen Beschreibungen (von Planetenbahnen z.B.), im Rahmen physikalischer Fragestellungen (wie z.B. dem Fall von Körpern) und in der Geometrie (z.B. für das Verhältnis von Höhe und Volumen bei Zylindern) an. Zu dieser Zeit werden aber die Funktionen noch als Kurven aufgefasst, der Funktionsbegriff ist noch nicht deutlich herausgearbeitet. 1673 verwendet Leibniz das Wort „Funktion“.[1]

Zur Zeit Freges ist der Funktionsbegriff noch nicht vereinheitlicht. Frege wendet sich etwa gegen das Verständnis einer Funktion von x als „Rechenausdruck, der x enthält“. Dann müsste nämlich, so Frege, $2 \cdot 2^3 + 2$ eine Funktion von 2 sein.[2]

---

[1] Siehe KLINE 1972, p.335-341

[2] Siehe FREGE FUB, p.18

Heute gehören Definitions- und Zielmenge wesentlich zur Funktion. Eine Funktion „weiß, von wo nach wohin sie geht“ (Zitat Michael Grosser). Präzise im heutigen Sinn gefasst ist eine Funktion eine eindeutige Relation, d.h. eine Menge R von geordneten Paaren $(x,y) \in X \times Y$, mit der Eigenschaft: zu jedem $x \in X$ gibt es genau ein $y \in Y$, sodass $(x,y) \in R$. Hier gibt es sozusagen überhaupt nur „Argumente“ und keine Funktion im Sinne Freges. Die Zuordnungsvorschrift scheint in der Definition überhaupt nicht auf.

Welche Berechtigung haben die beiden Zugänge?

Der Zugang über funktionale Zusammenhänge ist uns nahe, weil wir mit solchen Zusammenhängen ständig konfrontiert sind. Jede/r hat buchstäblich am eigenen Leib erfahren, dass die Brausetemperatur eine Funktion der Stellung des Temperaturreglers ist (und zwar unerfreulicher Weise praktisch immer eine unstetige). Fieberkurven, Wehenschreiber, EKG, Seismographen, Zerfallskurven radioaktiven Materials, Frequenzanalysen, elektronische Signalbearbeitung, etc. bestimmen große Teile unseres Lebens.

Der Zugang, der Funktionen als Relationen konzipiert, erhält heute im Kontext des Schulunterrichts leicht den Nimbus des Fragwürdigen, zumal dieses Konzept für die Schule mit der verunglückt extensiven Beschäftigung mit der Mengenlehre assoziiert wird. Immer dann aber, wenn „relationale“ Aspekte von Funktionen interessieren, wie etwa die Bijektivität einer Funktion, scheint es angemessen, Funktionen als Relationen zu fassen. Die Bijektivität von Funktionen spielt nicht nur in der Physik, beim Wechsel von Bezugssystemen eine Rolle, auch innermathematisch ist sie eine zentrale Eigenschaft. Als mathematisches Korrelat des Wechsels des Bezugssystems in der Physik kann die Substitution angesehen werden. Will man etwa die Funktion $f(x)$ durch $f(g(u))$ ersetzen, indem man $x=g(u)$ setzt, so ist in vielen Zusammenhängen die Bijektivität die entscheidende Eigenschaft für die Brauchbarkeit von g (die Injektivität wird in der Praxis häufig durch Monotonie gewährleistet sind, für die Surjektivität aber muss man tatsächlich die Wertemenge kennen). Und schließlich gibt es auch nicht-wissenschaftliche Kontexte, in denen das abstrakte Konzept der Funktion als Relation, insbesondere die Bijektivität einer Funktion, eine wichtige Rolle spielt. Man denke an die Tanzschule. Dort müssen sich Paare bilden. Da immer ein Mangel an Knaben herrscht, wird für die Mädchen die Bijektivität der Zuordnungsfunktion von Buben zu Mädchen zur oftmals einzig interessanten Eigenschaft. Die Mädchen interessiert nicht mehr, wer mit ihnen tanzt, sondern nur noch, dass es jemand tut. Jeder Streit von Geschwistern um Schokoladenstücke, aber auch Fragen internationaler

Verteilungsgerechtigkeit haben als Grundstruktur nichts anderes als die guten alten, jetzt verpönten Pfeildiagramme.

Frege jedenfalls hat mit seinen Ausführungen einer solchen „paarbildenden" Auffassung von Funktionen vehement entgegen gearbeitet. Nichtsdestotrotz hat sie sich in der formalen Fundierung der Mathematik durchgesetzt, und ich finde, dass man ihr auch für den Unterricht durchaus etwas abgewinnen kann.

2. „Irrtum"

$$\vdash (\grave{\varepsilon} f(\varepsilon) = \grave{\alpha} g(\alpha)) = (\overset{\mathfrak{a}}{\smile} f(\mathfrak{a}) = g(\mathfrak{a}))$$

FREGE GGA, §20

Ihre Entdeckung des Widerspruchs hat mich auf's Höchste überrascht und, fast möchte ich sagen, bestürzt, weil dadurch der Grund, auf dem ich die Arithmetik sich aufzubauen dachte, in's Wanken gerät.

Brief von Frege an Russell im Juni 1902[3]

Dieser Irrtum ist in eine wenig augenscheinliche Form verpackt. Er ist aber an einer sehr zentralen Stelle passiert, nämlich beim Versuch einer formalen Grundlegung der Arithmetik, und so muss man ihn trotz seiner wenig Aufsehen erregenden Gestalt als gravierend einstufen – wie es ja auch Frege selbst in der zitierten Passage aus dem Brief an Hilbert getan hat. Es ist hier nicht von Belang, Freges Schreibweise zu verstehen (die sich nicht durchgesetzt hat – auch hier war Frege glücklos). Entscheidend ist lediglich, dass obige Formel implizit enthält, dass der Übergang von der Beschreibung einer Menge zur ihren Elementen immer möglich ist. Genau das aber hat sich nicht nur in manchen Fällen als unmöglich herausgestellt, sondern auch die Grundlage für die Grundlagenkrise der Mathematik gebildet. Russell nämlich hat folgende Beschreibung einer Menge entworfen: die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten. Hält man sich vor Augen, dass für jedes Element dieser Menge gilt, es ist entweder in der Menge oder es ist nicht in der Menge, so sieht man, dass das Studium der Elemente

[3] in FREGE BRIEFE, p.61

dieser Menge zu einem Widerspruch führt, da die Menge selbst in ihr enthalten und nicht enthalten sein müsste[4]. Der Fehler, um den es hier geht, ist also bei Frege hinter einer abstrakten Form versteckt, aber im Grunde ist er ganz elementar. Freges Versuch einer Grundlegung der Arithmetik ist somit gescheitert. Russell lobt in nahezu rührender und offenkundig tief mitfühlender Weise die menschliche Größe Freges, der, wie oben zu lesen ist, den Fehler einfach in seiner vollen Tragweite eingesehen und eingestanden hat. Frege selbst tröstete sich damit[5], dass, wenn eine Fundierung der Arithmetik nicht in der von ihm versuchten Weise gelingt, es auch schwer vorstellbar ist, dass eine solche *anders* gelingen könnte. Dass er mit dieser Einschätzung recht hatte, bedeutete aber für die Mathematik den Ausgangspunkt einer Krise. Von den Erfolgen in der Geometrie, die ich im folgenden Abschnitt behandeln werde, beflügelt, hatte man sich eine axiomatische Fundierung der Arithmetik, sogar eine Fundierung in der Logik allein, erhofft. Russells Antinomie bedeutete das erste Aus für ein solches Vorhaben, dessen endgültiges Aus die Gödelschen Unvollständigkeitssätze brachten.

Bis heute gibt es keine einheitliche Lösung des Problems, gibt es keine einheitliche Weise mit dem Problem der Menge aller Mengen etc. umzugehen. Freges Fehler hat sich, so könnte man sagen, durchgesetzt.

3. „Irrtum"

> ***„Jedes Anej bazet wenigstens zwei Ellah.“***
> *„Wie kann jemand solchen haar-sträubenden Unsinn schreiben! Was ist ein Anej? Was ist ein Ellah?“ So höre ich mit Entrüstung fragen. Bitte sehr! Das ist ein Axiom, nicht von der alten Euklidischen, sondern von der modernen Art. Es definiert den Begriff Anej. Was ein Anej sei, ist eine ganz ungehörige Frage.*

FREGE ÜGG, p.297/298

Dies ist Teil einer heftigen Polemik gegen David Hilbert und dessen axiomatische Begründung der Geometrie, genauer gesagt, gegen dessen tatsächlich neue Auffassung von Axiomen. Frege spricht von einem *„Selbsterhaltungstrieb der Hilbertschen Lehre, zu deren Lebensbedingungen eine Trübung gehören mag.“*[6]

---

[4] Auch die Menge aller Mengen ist antinomisch.
[5] Im Nachwort von FREGE GGA, p.253.
[6] FREGE ÜGG, p.293/294

Was stört Frege an den Hilbertschen Axiomen? Während in der Tradition Euklids stehend die Mathematik bis dato Axiome als *„Grundtatsachen der Anschauung“*[7] aufgefasst hatte und Axiome laut Frege nur Wörter und Zeichen enthalten dürfen, deren Bedeutung schon klar ist[8], legen die Hilbertschen Axiome Objekte dadurch (im Hinblick darauf) fest, was man mit den Objekten tun kann und in welcher Beziehung sie zu den anderen Objekten stehen.

Die Axiome der Euklidischen Geometrie lauten etwa folgendermaßen: „Durch zwei Punkte geht genau eine Gerade.“, „Es existieren drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.“ ... Nun wird aber nirgends erklärt, was ein Punkt denn sei. Und darüber entrüstet sich Frege. Hilbert hält entgegen: Punkte, Geraden,... sind eben einfach alles, was die Axiome erfüllt. Frege schreibt: *„Axiome [...] können also nie die Bedeutung eines in ihnen vorkommenden Zeichens oder Wortes erst festsetzen wollen“*[9]. Genau das aber ist die Intention hinter Hilberts Axiomatik – exakter hätte man es nicht formulieren können.

Das obige Zitat macht sich darüber lustig, dass Punkte, Geraden etc gemäß Hilbert alles sein können, solange nur die Axiome erfüllt sind. Hilbert repliziert, nicht minder provokant, und stellenweise auch sichtlich genervt (nach drei Briefwechseln gibt er auf und schreibt, er hat keine Zeit): *„Wenn ich unter meinen Punkten irgendwelche Systeme von Dingen, z.B. das System: Liebe, Gesetz, Schornsteinfeger ..., denke und dann nur meine sämmtlichen Axiome als Beziehungen zwischen diesen Dingen annehme, so gelten meine Sätze, z.B. der Pythagoras auch von diesen Dingen.“*[10] Er reagiert aber auch ernsthafter, indem er darauf hinweist, dass Geometrie[11] und Physik immer wieder von der Austauschbarkeit der Gegenstände Gebrauch machen.

Für die Mathematik heute ist in der Geometrie die Welt noch heil. Die Hilbertschen Axiome zur Begründung der Geometrie haben sich bewährt[12]. Die Hilbertsche Sicht von Axiomen ist weitgehend unumstritten. (Die Versuche konstruktiver Geometriebegründungen wollen lediglich die Axiome ihrerseits begründen, die intuitionistische Mathematik anerkennt ein konkretes, etabliertes Axiomensystem nicht, aber Axiomatisierungen à la Hilbert werden nicht prinzipiell in Frage gestellt.) Eine der

---

[7] Siehe Freges Brief an Russell am 27.Dez.1899 (FREGE BRIEFE, p.8).
[8] Siehe FREGE ÜGG, p. 294, sowie FREGE BRIEFE, p.8.
[9] FREGE BRIEFE, p.8
[10] In Hilberts Brief an Frege am 29.Dez.1899 (FREGE BRIEFE, p.13).
[11] Etwa wenn die Geometrie vom Dualitätsprinzip Gebrauch macht.
[12] Kambartel versucht Frege gegenüber Hilbert ins Recht zu setzen (KAMBARTEL 1976). Er hat recht, dass Frege klar gesehen hat, was die Hilbertschen Axiome *nicht* leisten (nämlich die eindeutige, inhaltliche Bestimmung von Objekten der Geometrie). Frege hat aber nicht erkannt, einen wie großen methodischen Gewinn die Hilbertschen Axiome darstellen.

ersten intellektuellen Leistungen, StudentInnen der Mathematik zu Beginn ihres Studiums abverlangt werden, ist die Einsicht, dass die reellen Zahlen in der Mathematik das *sind*, was die Axiome erfüllt. Hilberts Sicht der Axiome ist also kanonisch geworden, wir sind gewohnt die Rolle der Axiome so zu sehen. Frege aber war durch die Hilbertschen Axiome mit etwas konfrontiert, was er ganz und gar nicht gewohnt war und das auch zu seiner elaborierten Theorie der Bedeutung nicht gepasst hat, und auf diese Situation hat er mit Ablehnung des Ungewohnten und Ungewollten reagiert.

Während Frege bei dem Versuch der Grundlegung der Arithmetik selbst neue formale Wege zu beschreiten versucht hat, ist er hier umwälzende Gedanken zu fassen sehr wenig willig.

4. „Irrtum"

> *Niemand kann zwei Herren dienen. Man kann nicht der Wahrheit dienen und der Unwahrheit. Wenn die Euklidische Geometrie wahr ist, so ist die nichteuklidische Geometrie falsch, und* ***wenn die nichteuklidische Geometrie wahr ist, so ist die euklidische Geometrie falsch.***

FREGE ÜEG, p.183

Fast ist man geneigt zu sagen, dieser Irrtum bedarf keines weiteren Kommentars. Über diese Auffassung Freges ist die Zeit so radikal hinweggegangen, dass wir uns schwer tun, uns Frege gegenüber empathisch zu zeigen. Nicht nur haben sich nicht-euklidische Geometrien in der Physik vielfach als die adäquaten Modelle erwiesen, sondern auch in der Mathematik sind sie unumstrittener Standard geworden. Dennoch scheint es mir überlegenswert, warum Frege so unbeirrbar an der Euklidischen Geometrie festgehalten hat. Ich kann 3 Gründe dafür ausmachen:

1.) Der Wahrheitsanspruch in den Naturwissenschaften zur Zeit Freges war ein anderer. Die Wissenschaftsauffassung war insgesamt viel weniger konstruktivistisch. Das, was man heute Modelle nennt, wurde damals noch fester an die Gegenstände gebunden gedacht. Im speziellen kann man die Auffassung so beschreiben: Geometrie *ist* die räumliche Ordnung der Welt, der Gegenstände in der Welt. Wenn dem so ist, kann es natürlich nur *eine* Geometrie geben.

2.) Das Raumkonzept in der Philosophie ist vielfach sehr abstrakt. Wo man sich in der Philosophie von der naiv-realistischen Auffassung bereits verabschiedet hatte (wie etwa Kant), da ist an die Stelle des empirischen Raumkonzepts eines getreten, das die Bedingungen jeglichen räumlichen Denkens und Vorstellens überhaupt fassen soll. Ein solches muss aber nun natürlich erst recht wieder eindeutig sein wie das naiv-realistische.

3.) Denkgewohnheiten sind mächtig. John von Neumann soll sinngemäß gesagt haben: Mathematik ist mehr Gewöhnung als Verstehen. Dies ist ein didaktisch bedeutungsvoller Umstand, insofern als er Lehrende darauf hinweist, dass Köpfe von Kindern nicht leer sind. Lässt sich ein Gedanke nicht in unser Vorwissen und unsere Vorerfahrung einbinden, dann reagieren wir mit der Eliminierung des Gedankens, nicht mit dem Verwerfen unserer Erfahrung.

3. Aller Leute Irrtümer

Nicht nur Frege hat Irrtümer begangen, auch z.B. dem Ausspruch Einsteins „Gott würfelt nicht“ zur Ablehnung der Quantentheorie würden heute die meisten Physikerinnen mit „Und er würfelt doch“ begegnen[13]. Und nicht nur die großen Herren, vor allem auch die Kinder machen Fehler, die die Lehrenden beschäftigen. Es gibt so etwas wie eine Kultur des Sammelns von Fehlern: bei Schularbeiten und in Didaktik-Artikeln werden Fehler, gesucht, registriert, katalogisiert und bewertet[14]. Der Stellenwert, den Fehler im Zusammenhang mit dem Lernen von Mathematik haben ist offensichtlich groß. Viel Aufwand wird zur Entwicklung von Strategien zur Fehlervermeidung betrieben.

Heinrich Bürger ist in seinen Lehrveranstaltungen stets dafür eingetreten, dass man keine Punkte auf Schularbeiten vergibt, sondern das Verständnis der SchülerInnen einschätzt. Er wollte also das negative Gewicht, das Fehler im Mathematikunterricht erhalten, reduzieren. Diese Ambitionen finde ich unterstützenswert, aber mir geht es hier nicht darum, Irrtümer als weniger schlimm anzusehen – auch nicht darum, Strategien zu ihrer Bekämpfung zu entwickeln –, sondern ihnen überhaupt ein positiven

[13] *Zu einer Analyse anderer historischer Fehler siehe* LAUGWITZ/SPALT *1984.*
[14] *Siehe etwa* FÜHRER *1984.*

Stellenwert zuzusprechen. Die Fragen, die mich interessieren, lauten: Was ist die Rolle von Fehlern im Erkenntnisprozess? Wie sehr sehen und nützen wir die produktive Kraft von Fehlern?

Keinesfalls möchte ich aus Freges Irrtümern nur das platte Resume „Irren ist menschlich" ziehen. Ich versuche in einer produktiv-konstruktiven Umgangsweise mit Freges Irrtümern diese dahingehend zu analysieren, welche Einsichten sich aus ihnen über „jedermanns Fehler" und für die Didaktik allgemein gewinnen lassen.

Der 1. Irrtum liegt an der Schnittstelle von Theorie und Anwendung. Er kann uns darauf hinweisen, dass die theoretische Fassung eines Begriffs und seine Brauchbarkeit eine Diskrepanz erzeugen können. Die Vorstellung von einer Funktion als Teilmenge eines kartesischen Produkts von Mengen hilft im Umgang mit Fieberkurven nicht viel. Wenn man einen Begriff zu präzisieren versucht, muss man sich fragen: Leistet der Begriff in seiner präzisierten Fassung überhaupt das, was ich von ihm will? (Man denke etwa an die Distributionen: Die Physiker wollten eine Funktion, die bis auf eine Stelle überall 0 ist, deren Integral aber positiv ist. So eine Funktion gibt es natürlich nicht. Daraufhin haben die Mathematiker verallgemeinerte Funktionen, die sogenannten Distributionen, erfunden. Damit allerdings waren die Physiker nicht glücklich – sie wollten ja eine *Funktion*, die das Gewünschte erfüllt. Oder: Die Summe von unendlichen Reihen hat heute eine einheitliche formale Fassung – was ist aber, wenn ich *will*, dass 1-1+1-1+... als Grenzwert ½ liefert? Dann ist die übliche Definition der Konvergenz von Reihen unbrauchbar.) Richtigkeit ist auch abhängig von Zwecken. Richtigkeit erweist sicht dadurch, dass sich etwas bewährt. Der Physiker Ernst Mach hat gesagt: *„Erkenntnis und Irrtum fließen aus denselben psychischen Quellen; nur der Erfolg mag beide zu scheiden. Der klar erkannte Irrtum ist als Korrektiv ebenso erkenntnisfördernd wie die positive Erkenntnis."*[15] Ideen, Konzepte und Begriffe müssen *getestet* werden. Erst die Geschichte entscheidet über die Richtigkeit der Theorien. Freges Auffassung von Funktion hat sich nicht durchgesetzt aufgrund der, möglicherweise kontingenten, historischen Tatsache, dass die MathematikerInnen den Weg der konsequenten Reduktion auf die Mengenlehre gewählt haben.

[15] MACH 1926, S.116

Jedes *empirische* Vorgehen im Sinne eines Ausprobierens schließt das, was im Nachhinein als „falsch" klassifiziert wird, als zuerst völlig gleichberechtigte Alternative im Erkenntnisprozess ein.

(Am Rande sei erwähnt, dass der 1. Irrtum auch die Frage aufwirft, was von der Hochschulmathematik in die Schule diffundieren soll.)

Zum 2. Irrtum möchte ich wiederholen: Er hat sich durchgesetzt! Bis heute kann man zwar Freges Fehler vermeiden, aber nur um den Preis, dass man keine überzeugende Alternative hat. Diese Unerfreulichkeit hat eine Entsprechung in der Alltagserfahrung: Es gibt Situationen, in denen kann man es nur falsch machen. Auch im Schulalltag tritt dieses Phänomen auf: Ein Schüler, der ein offenkundig falsches Resultat erhält, hat nur die Wahl, ein falsches Resultat oder gar keines zu präsentieren. Natürlich ist diese Situation nur lokal gesehen mit jener Freges vergleichbar, da der Schüler den Fehler, der das falsche Resultat bewirkt, finden und beheben könnte, während Frege prinzipiell kein akzeptables Resultat liefern kann. Für die augenblickliche Situation des Schülers besteht aber kein Unterschied.

Wichtiger erscheint mir am 2. Irrtum Freges, dass der Widerspruch, der Frege zum Verhängnis geworden ist, auf einer Ebene gelegen ist, mit der sich Frege nicht unmittelbar beschäftigt hat. Frege hat Prädikate und Mengen und deren Verhältnis als unproblematisch *vorausgesetzt*, und mit diesen Objekten gearbeitet. Natürlich kann man Frege in diesem Fall vorwerfen, er hätte – wie es Russell getan hat – eine Ebene „darunter" nachsehen müssen, ob alles problemlos funktioniert, aber dieses Darunter-Nachsehen hat seine Grenzen. Mathematik muss sich wie jede Wissenschaft auf Schon-Vorhandenes und Schon-Gewusstes berufen können, das nicht mehr individuell hinterfragt wird, sonst funktioniert sie nicht. Auch SchülerInnen operieren mit einem Wissen, dessen Richtigkeit sie nicht bei jedem Vollziehen überprüfen können. Das muss zwar so sein, ist aber natürlich gleichzeitig eine Quelle für Fehler. Der Berufung auf die Ergebnisse anderer in der Wissenschaft entspricht in der Schulwirklichkeit die Berufung auf die Autorität der LehrerIn. Die Autorität des/r Lehrenden ist in vielen Fällen das einzige Kriterium der Richtigkeit, das den Lernenden zur Verfügung steht. Ein elementares Beispiel: Ein durchschnittlich begabtes Kind ist sicher nicht in der Lage, den Divisionsalgorithmus zu verstehen, wenn es ihn lernt. Der Beweis des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung wird zumeist, wenn überhaupt, in einer

Mogelversion präsentiert – dennoch hantieren SchülerInnen mit Stammfunktionen zur Berechnung von Flächeninhalten.

Widersprüche auf einer Ebene, die nicht zur Disposition steht, sind das, was in jedem *deduktiven* System als Gefahr in Kauf genommen werden muss.

Dem 3. und 4. Irrtum ist eine mangelnde Offenheit gegenüber Unvertrautem gemeinsam. Das Unvertraute an der Hilbertschen Axiomatik ist die Methode; das Unvertraute an den Nicht-Euklidischen Geometrien sind die Inhalte bzw. die anderen Anschauungen, die mit Begriffen verbunden werden müssen. Denkgewohnheiten sind mächtig, das ist auch beim Mathematiklernen ein gravierender Faktor. Ich verspüre zum Beispiel den heftigen Impuls beim Roulette nach einer Serie von sieben Schwarz beim achten Mal auf Rot zu setzen.

Wohlvertrautheit[16] ist zwar eine Barriere für das Aufnehmen neuen Wissens, andererseits ist Wohlvertrautheit und Gewohnheit in ihrer konservierenden Rolle aber auch die Basis jeglichen *Wissens*.
„Ein lebendiges Wesen reagiert mit Irrtümern darauf, daß ihm Wissen injiziert wird. Denn dieses Wissen wird Störungen hervorrufen – wie immer, wenn ein Fremdkörper in einen lebenden Organismus aufgenommen wird.“[17] Ohne konservierende und träge Kräfte in uns wären diese Störungen nicht möglich, weil es nichts gäbe, was zu stören ist.

Ich fasse zusammen: Ohne die Fehler, die bei Trial-and-Error entstehen, gäbe es überhaupt kein empirisches Vorgehen. Ohne das Risiko, dass man sich auf Falsches verlässt, gibt es kein deduktives System. Und ohne eine gewisse Resistenz gegenüber Unvertrautem, ist Wissen unmöglich.

Fehler müssen passieren – wenn nicht an einer bestimmten Stelle, so doch irgendwo. Empirische Herangehensweisen müssen Fehler produzieren, sonst sind sie nicht empirisch.[18] Manchmal entstehen jedoch auch Fehler mit Notwendigkeit an einer

[16] Die mit Wittgenstein vertraute LeserIn kann dieses Wort hier in Wittgensteins Sinn verstehen.
[17] BARUK 1989, p.43
[18] Horst Struve vertritt (etwa in STRUVE 1990) die Auffassung, dass SchülerInnen im Mathematikunterricht, insbesondere im Geometrieunterricht, eine empirische Theorie, nicht eine deduktive – wie es dem Selbstverständnis der Mathematik(erInnen) entsprechen würde – lernen. Sie

bestimmten Stelle. Frege ist mit seiner Grundlegung der Arithmetik gescheitert, weil er, wie die Geschichte gezeigt hat, scheitern musste.

Zuletzt noch zu einem Einwand: „Schüler und Schülerinnen machen doch nicht *solche* Fehler. Die revolutionieren nicht die Mathematik. Die merken sich auch beim 5. Mal noch nicht, dass man in (a+b)/a nicht durch a kürzen darf." Ich möchte zweierlei entgegnen: Erstens, genau so einen Fehler hat Frege auch gemacht. Er hat einfach nicht zur Kenntnis genommen, was ihm Hilbert zu seinen Axiomen fünfmal geschrieben hat. Zweitens entdecken auch die SchülerInnen die Welt der Mathematik neu, nicht anders als Frege.

Ich schließe meine Entgegnung auf diesen Einwand und meinen Aufsatz mit der Erzählung eines Erlebnisses ab, das ich mit einer Nachhilfeschülerin hatte. Sie schrieb auf ein Blatt $a^2 + b^2 = c^2$ und danach a+b=c. Ich erklärte ihr an Beispielen und geometrisch, dass diese Folgerung in der Regel nicht stimmen könne. Sie wirkte gleichgültig bis frustriert. Dann fragte ich sie: „Hättest du denn gern, dass es so ist?" Daraufhin strahlte sie mich an und antwortete mit einem begeisterten „Ja!". Erst ab diesem Zeitpunkt gab es für mich einen Ansatzpunkt zum Umgang mit ihren Problemen. Erst Diskussionen in den Termini „schön", „einfach", „logisch einfach", „schön, aber falsch" haben ihr ermöglicht, beim Anblick einer Formel den jeweils richtigen Ideen nachzugehen. Diese Schülerin hatte eine starke Triebkraft, ästhetischen Impulsen und Kriterien der Einfachheit zu folgen. Frege hatte, wie ich an manchen Stellen angedeutet habe, seinen philosophischen Hintergrund als eine starke Triebkraft, von gewissen Vorstellungen nicht abzulassen. SchülerInnen gehen mit Wünschen, Erwartungen und Vorerfahrungen an die Mathematik heran. Die Mathematik ist neu, und sie müssen sich darin zurechtfinden. Dazu müssen sie ausprobieren (empirisch herangehen), sich auf ausgewählte Richtigkeiten verlassen (partiell deduzieren) und mit Protest reagieren, wenn sich etwas nicht in ihren gewohnten Umgang mit der Welt fügt (Wissen konservieren), kurz: Sie müssen Fehler machen.

---

lernen demnach also primär durch Erfahrung und Experiment. Wenn diese Auffassung richtig ist, so sind Fehler in der Lernmethodik unumgänglich eingebaut.

LITERATUR:

BARUK 1989 — Baruk, St., *Wie alt ist der Kapitän? Über den Irrtum in der Mathematik*, Birkhäuser, Basel, 1989

FREGE BRIEFE — Gabriel, G., Kambartel, F., Thiel, Ch. (Hg.), *Gottlob Freges Briefwechsel*, Felix Meiner Verlag, Hamburg, 1980

FREGE FUB — Frege, G., *Funktion und Begriff*, zitiert nach: Frege, G., *Funktion, Begriff, Bedeutung*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1994, p.18-39

FREGE ÜEG — Frege, G., *Über Euklidische Geometrie*, in: Frege, G., *Nachgelassene Schriften*, Felix Meiner Verlag, Hamburg, 1969, p.182-184

FREGE ÜGG — Frege, G., *Über die Grundlagen der Geometrie*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 15.Band, 1906, p.293-309

FREGE GGA — Frege, G., *Grundgesetze der Arithmetik*, Georg Olms Verlagsbuchhandlung, Hildesheim, 1966

FÜHRER 1984 — Führer, L., *Ich denke, also irre ich. Anfänge und Grenzen der Fehlerkunde*, mathematik lehren 5 (1984), S.2-9

KLINE 1972 — Kline, M., *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, New York, 1972

LAUGWITZ/SPALT 1984 — Laugwitz, D., Spalt, D., *Falsch – Richtig – Wahr*, mathematik lehren 5 (1984), S.58-59

MACH 1926 — Mach, E., *Erkenntnis und Irrtum*, Verlag Johann Ambrosius Barth, Leipzig, 1926

KAMBARTEL 1976 — Kambartel, F., *Frege und die axiomatische Methode. Zur Kritik mathematik-historischer Legitimationsversuche der formalistischen Ideologie*, in: Schirn, M. (Hg.), Studien zu Frege I. Logik und Philosophie der Mathematik, Frommann – Holzboog, Stuttgart, 1976

STRUVE 1990 — Struve, H., *Grundlagen einer Geometriedidaktik*, B.I. Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1990